

## Tp : Correcteurs PID numériques

Cette séance illustre la régulation à partir de correcteurs de type PID numériques. Une première partie évoque les problèmes typiques rencontrés lors de la conception de tels régulateurs. Un exemple concret de régulation sera ensuite traité en utilisant successivement un correcteur de type PID1, puis PID2, synthétisés dans une structure de type RST. Enfin, la troisième partie de cette séance concerne le pilotage d'un système réel à l'aide d'un correcteur PID numérique.

Toute la partie simulation et expérimentation sera effectuée sous le logiciel Matlab. la synthèse des correcteurs sera programmée à l'aide d'un scripte Matlab, les simulations seront effectuées sous Simulink.

## 1 Influence des zéros dans les systèmes

Cette partie analyse l'influence de zéros lors du placement de pôles en spécification de performances.

### 1.1 Pôles et performances des systèmes

#### 1.1.1 Introduction

Considérons le système continu suivant :

$$G(p) = \frac{1}{1 + 2\xi \frac{p}{\omega_n} + \frac{p^2}{\omega_n^2}} = \frac{\omega_n^2}{(p - p_1)(p - p_1^*)}$$

avec  $p_1 = \omega_n(-\xi \pm j\sqrt{1 - \xi^2})$

Ce système classique du second ordre possède une réponse indicielle caractérisée par son temps de montée et son dépassement (voir annexe page 5).

Connaissant les performances souhaitées du système (temps de montée et dépassement indiciel), il est possible de spécifier les paramètres  $\xi$  et  $\omega_n$  et d'en déduire les pôles. Ces derniers permettent ainsi de caractériser le système.

Dans le cas d'un système numérique de second ordre défini par sa transformée  $G(z)$ , les performances indicielles peuvent aussi être définies par ses pôles  $z_1$  et  $z_1^*$  en utilisant le fait que :

$$z_1 = e^{p_1 T_e}$$

Avec  $T_e$  : période d'échantillonnage du système.

#### 1.1.2 Application

La première étape lors de la conception de régulateur numériques est d'imposer les performances que devra atteindre le système après correction. On impose fréquemment que le système bouclé soit de type second ordre. Les pôles de ce système seront donc déduits des performances souhaitées en boucle fermée.

1. Déterminer la valeur des pôles d'un système numérique de second ordre tel que le dépassement indiciel  $D$  et le temps de montée  $t_m$  aient les valeurs suivantes :

(a)  $D = 25\%$  et  $t_m = 10T_e$

(b)  $D \approx 0\%$  et  $t_m = 5T_e$

On utilisera le tableau donné en annexe.

2. En déduire les fonctions de transfert  $G_1(z)$  et  $G_2(z)$  des systèmes numériques répondant aux deux cas précédents. On souhaite de plus que le gain statique soit unitaire dans les deux cas.
3. Simuler sous MatLab Simulink la réponse indicielle de chaque système et vérifier les performances obtenues.
4. On suppose qu'un zéro réel  $z_0 = 0.1$  puis  $z_0 = 0.7$  apparaît dans  $G_2(z)$ . Observer les modifications de performances obtenues.

Les fonctions *tf* (création d'une fonction de transfert) et *c2d* (calcul de la transmittance bloquée d'un système continu) pourront éventuellement être utilisées.

## 1.2 Compensation de zéros

Nous venons de voir l'influence néfaste des zéros sur les performances des systèmes. Il s'avère souvent qu'un système présente, après correction, des zéros non souhaités (issus par exemple du procédé). Il est donc nécessaire de les compenser en plaçant un ou plusieurs pôles de compensation dans la boucle de régulation. Néanmoins, la position du ou des zéros n'est pas forcément connue avec précision (dans le cas de zéros issus du procédé par exemple). Il sera donc nécessaire de vérifier l'influence que peut avoir leur compensation approximative.

1. Considérons la fonction de transfert  $G(z)$  de zéro réel  $z_0$  approximativement compensé par un pôle réel  $p_0$  :

$$G(z) = \frac{B(z) (1 - z_0 z^{-1})}{A(z) (1 - p_0 z^{-1})} \text{ avec } p_0 = z_0 + \varepsilon$$

Montrer qu'en pratique la compensation du zéro  $z_0$  ne peut être réalisée dans le cas d'un zéro instable (c'est-à-dire n'appartenant pas au cercle  $|z| = 1$ ).

2. Reprendre le système  $G_2(z)$  du paragraphe précédent avec le zéro stable  $z_0 = 0.7$ . Effectuer la compensation de ce zéro par un polynôme  $C(z) = 1 - p_0 z^{-1}$  tel que

$$G_{2c}(z) = \frac{G_2(z)}{C(z)}$$

On prendra  $z_0 = 0.7$  et  $p_0 = 0.71$ . Observer la réponse et les performances du système compensé.

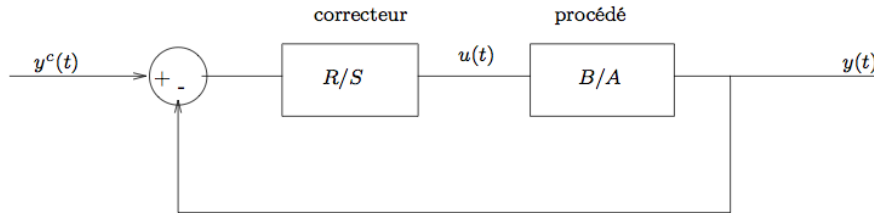
3. On suppose à présent que  $z_0 = 1.2$  (zéro instable) et  $p_0 = 1.1$ . Observer la réponse du système avant et après compensation.
4. Effectuer une compensation parfaite de  $z_0$  en prenant  $p_0 = z_0 = 1.2$ . Observer la réponse du système et conclure.

## 2 Correcteurs de type PID numériques

### 2.1 Introduction

Le correcteur de type PID est universellement employé dans les systèmes continus, d'où l'idée de l'utiliser pour les systèmes numériques.

La structure d'un tel correcteur est montrée en figure 1. Le procédé (avec bloqueur) est modélisé par la fonction  $B/A$  et le correcteur par  $R/S$ .



$$\text{Avec } \frac{R}{S} = \frac{r_0 + r_1 z^{-1} + r_2 z^{-2}}{(1 - z^{-1})(1 + s_1 z^{-1})} \text{ et } \frac{B}{A} = \frac{b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2}}{1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2}}$$

FIGURE 1 – structure d'un correcteur de type PID numérique.  
t

### 2.2 Correcteur PID1

On considère un procédé avec bloqueur dont la fonction de transfert échantillonnée est définie par :

$$GBo(z) = \frac{B}{A} = \frac{0.4z^{-1} + 0.8z^{-2}}{1 - 1.7z^{-1} + 0.72z^{-2}} \text{ pour } T_e = 25ms$$

1. Montrer que la fonction de transfert du système bouclé sans correction peut s'écrire :

$$H(z) = \frac{H_N}{H_D^+} = \frac{B(z)}{B(z) + A(z)}$$

2. Observer la réponse indicielle du système bouclé sans correction. Observer que le système bouclé est instable et vérifier ses pôles par la fonction `roots`.
3. Montrer que la structure du système corrigé de la figure 1 présente une fonction de transfert en boucle fermée donnée par :

$$H_{BF}(z) = \frac{BR}{AS + BR} = \frac{BR}{H_D^+} \quad (1)$$

4. Déterminer la valeur à donner aux coefficients du polynôme  $H_D^+(z)$  défini par :

$$H_D^+(z) = 1 + h_1 z^{-1} + h_2 z^{-2}$$

pour que le système corrigé présente un temps de montée de  $175ms$  et un dépassement indiciel quasiment nul.

5. La relation  $H_D^+ = AS + BR$  permettant de déterminer les coefficients des polynômes  $R$  et  $S$  en fonction de  $A$ ,  $B$  et  $H_D^+$  conduit à une équation matricielle dont la forme générale de la matrice  $M$  :

$$\begin{pmatrix} 1 \\ h_1 \\ h_2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = M \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ s_1 \\ r_0 \\ r_1 \\ r_2 \end{pmatrix}$$

6. Déterminer avec MatLab la valeur des coefficients  $s_1$ ,  $r_0$ ,  $r_1$  et  $r_2$  permettant d'obtenir les performances souhaitées. En déduire l'expression des polynômes  $R$  et  $S$  du correcteur.
7. Simuler le système corrigé avec ce correcteur et expliquer les performances indicielles obtenues.
8. Supprimer artificiellement le polynôme  $R$  intervenant au numérateur de la fonction de transfert en boucle fermée du système. Observer la nouvelle réponse indicielle et conclure.

### 2.3 Correcteur de type PID2

Le correcteur précédent ne répondant pas aux performances souhaitées il est nécessaire d'adopter une nouvelle structure n'introduisant pas de zéro en plus de ceux introduits par le polynôme  $B$  du procédé. On adopte la nouvelle fonction de transfert en boucle fermée suivante :

$$H(z) = \frac{H_D^+(1)}{B(1)} \cdot \frac{B}{H_D^+} \text{ avec } H_D^+ = AS + BR \quad (2)$$

1. Expliquer l'intérêt des constantes  $H_D^+(1)$  et  $B(1)$ .
2. La réalisation de cette fonction de transfert n'est pas possible avec la structure montrée en figure 1 (qui conduit à la relation (1)). On utilise donc la structure plus générale de type RST de la figure 2.

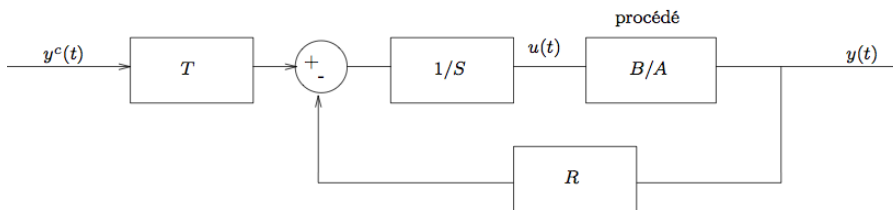


FIGURE 2 – structure d'un correcteur de type RST.

Montrer que la relation (2) implique que  $T(z) = \frac{H_D^+(1)}{B(1)}$  et, puisque  $S(1) = 0$  (car  $S = (1 - z^{-1})(1 + s_1 z^{-1})$ ), alors  $T(z) = R(1)$ .

3. Effectuer le calcul des polynômes  $R$ ,  $S$  et  $T$  afin d'atteindre les performances souhaitées précédemment.
4. Simuler le correcteur et vérifier que les performances sont respectées.

## Annexe : Systèmes du second ordre

Soit  $G(p)$  la fonction de transfert d'un système de deuxième ordre définie par :

$$G(p) = \frac{1}{1 + 2\xi \frac{p}{\omega_n} + \frac{p^2}{\omega_n^2}}$$

$\xi$  est communément appelé **coefficient d'amortissement**

$\omega_n$  représente la **pulsation propre** du système

1. La **réponse indicielle**  $S_1(t)$  (réponse du système à un échelon d'amplitude 1) est donnée par :

$$S_1(t) = 1 - \frac{e^{-\xi\omega_n t}}{\sqrt{1-\xi^2}} \cos\left(\omega_n t \sqrt{1-\xi^2} - \alpha\right) \text{ avec } \tan(\alpha) = \frac{\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}$$

2. Le **dépassement indiciel**  $D$  est donné par la relation :

$$D = \exp\left(-\frac{\pi\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}\right)$$

3. Le **temps du premier maximum** est donné par :

$$t_m = \frac{\pi}{\omega_n \sqrt{1-\xi^2}}$$

4. La **pulsation amortie** de la réponse indicielle est donnée par :

$$\omega_a = \omega_n \sqrt{1-\xi^2}$$

5. Les **pôles** du système sont complexes conjugués lorsque  $\xi < 1$ . Ils sont tels que :

$$F(p) = \frac{1}{1 + 2\xi \frac{p}{\omega_n} + \frac{p^2}{\omega_n^2}} = \frac{\omega_n^2}{(p - p_1)(p - p_1^*)}$$

$$\text{avec } p_1 = \omega_n(-\xi \pm j\sqrt{1-\xi^2})$$

Un système numérique de second ordre équivalent sera obtenu si l'on impose ses pôles  $z_1$  et  $z_1^*$  tels que :

$$z_1 = e^{p_1 T_e}$$

$\xi$	$t_m \cdot \omega_n$	$t_r \cdot \omega_n$	$t_{pic} \cdot \omega_n$	$T_p \cdot \omega_n$	$D\%$	$\omega_r / \omega_n$	$\omega_c / \omega_n$	$\omega_c / \omega_r$	$M_{dB}$
0,1	1,68	30	3,16	6,31	73	0,99	1,54	1,56	14
0,15	1,74	20	3,18	6,36	62	0,98	1,53	1,56	10,5
0,2	1,81	14	3,21	6,41	53	0,96	1,51	1,57	8,1
0,25	1,88	11	3,24	6,49	44	0,94	1,48	1,59	6,3
0,3	1,97	10,1	3,29	6,59	37	0,91	1,45	1,61	4,8
0,35	2,06	7,9	3,35	6,71	31	0,87	1,42	1,63	3,6
0,4	2,16	7,7	3,43	6,86	25	0,82	1,37	1,67	2,7
0,45	2,28	5,4	3,52	7,04	21	0,77	1,33	1,72	1,9
0,5	2,42	5,3	3,63	7,26	16	0,71	1,27	1,80	1,2
0,55	2,58	5,3	3,76	7,52	12,6	0,63	1,21	1,93	0,7
0,6	2,77	5,2	3,93	7,85	9,5	0,53	1,15	2,17	0,3
0,65	3,00	5,0	4,13	8,27	6,8	0,39	1,08	2,74	0,1
0,7	3,29	3	4,40	8,80	4,6	0,14	1,01	7,14	0
0,75	3,66	3,1	4,75	9,50	2,84	-	0,94	-	-
0,8	4,16	3,4	5,24	10,5	1,52	-	0,87	-	-
0,85	4,91	3,7	5,96	11,93	0,63	-	0,81	-	-
0,9	6,17	4	7,21	14,41	0,15	-	0,75	-	-
0,95	9,09	4,1	10,06	20,12	0,01	-	0,69	-	-

---

Formules utilisées :

- $t_m = \frac{1}{\omega_n \sqrt{1-\xi^2}} (\pi - \arccos \xi)$  ( $t_m$  : temps de montée)
- $t_r \simeq \frac{1}{\omega_n \cdot \xi} \log_e \left( \frac{100}{n} \right)$  ( $t_r$  : temps de réponse à  $n\%$ ,  $\xi < 0,7$ , ici  $n = 5\%$ )
- $t_{pic} = \frac{\pi}{\omega_n \sqrt{1-\xi^2}}$  ( $t_{pic}$  : temps de pic)
- $T_P = \frac{2\pi}{\omega_n \sqrt{1-\xi^2}}$  ( $T_P$  : pseudo-période)
- $D\% = 100 \exp \frac{-\pi\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}$  ( $D\%$  : dépassement)
- $\omega_r = \omega_n \sqrt{1-2\xi^2}$  ( $\omega_r$  : pulsation de résonance)
- $\omega_c = \omega_n \sqrt{1-2\xi^2 + \sqrt{1+(1-2\xi^2)^2}}$  ( $\omega_c$  : pulsation de coupure)
- $m = \frac{1}{2\xi \sqrt{1-\xi^2}}$  ( $m$  : facteur de résonance)
- $M_{dB} = 20 \log m$  ( $M_{dB}$  : facteur de résonance en décibels)